Text ist noch in Arbeit

Schwerpunkte

von Flächen und Körpern

Text Nummer 51815

Stand 15. Januar 2019

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Vorwort

Die Berechnung von Flächen- und Körperschwerpunkten ist eine wichtige Anwendung von Mehrfachintegralen. Hier habe ich einige Berechnungen zusammengestellt.

Inhalt

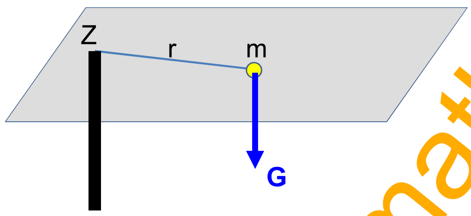
Wird fortgesetzt…

1 Einführung

Vielleicht erinnert sich der Leser an die Definition des Begriffes Schwerpunkt aus der Physik:
Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Punkt, in dem man sich die ganze Masse vereinigt denken kann, so dass die Wirkung der Gravitationskraft auf ihn dieselbe ist.

Mir ist als Beispiel in Erinnerung: Man nehme ein Buch und balanciere es auf dem Mittelfinger.
Es bleibt genau dann in stabiler Lage, wenn man das Buch unter seinem Schwerpunkt unterstützt.

Wenn man das Buch weiter weg vom Schwerpunkt unterstückt, dann kippt es sofort. Der Grund:
Die Gravitationskraft, also die Gewichtskraft der Buchmasse erzeugt eine Hebelwirkung.
Dies will ich wie folgt skizzieren:



Der Unterstützungspunkt sei Z, Im Abstand r davon befindet sich der Schwerpunkt m als Masseersatz. In S greift die Gewichtskraft an und erzeugt somit ein „Drehmoment". Da für die Wirkung der Gewichtskraft nicht nur deren Größe, sondern auch der sogenannte Hebelarm, also der Abstand r von Bedeutung ist, haben die Physiker dieses Drehmoment so definiert:

$$D = G \cdot r$$

Mit $G = m \cdot g$ wird daraus $$\boxed{D = m \cdot g \cdot r} \qquad (1)$$

Für unregelmäßige Körper hilft diese Formel wenig. Man muss zur Integralrechnung greifen.
Dazu denkt man sich die Masse in unendlich viele infinitesimal kleine Masseelemente **dm** zerlegt. die zur Drehachse (Unterstützungspunkt) den (senkrechten) Abstand r haben. Dessen Drehmoment ist dann $$\boxed{dD = g \cdot r \cdot dm} \qquad (2)$$

Daraus erhält man durch Aufsummieren aller „Mini-Drehmomente" dD, also durch Integrieren, über die Gesamtmasse m das Gesamtdrehmoment D:

$$\boxed{D = \int_m gr\,dm} \qquad (3)$$

Für die praktische Berechnung ist diese Formel noch zu grob. Wir müssen den Schwerpunkt mit dem Abstand r_S ins Spiel bringen, indem man dieses Drehmoment mit (1) gleichsetzt:

$$m \cdot g \cdot r_S = \int_m gr\,dm \quad | :g$$

$$m \cdot r_S = \int_m r\,dm \qquad (4)$$

Wir betrachten nun nur die Köper, die man als ***homogen*** bezeichnet. Das bedeutet, dass sie überall dieselbe Dichte haben. Dann kann man nämlich von der Masse auf das Volumen, also bei vielen Körpern auf geometrische Abmessungen umrechnen.

Die Dichte ist bekanntlich definiert als die pro Volumeinheit enthaltene Masse: $\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$

Die Einheit ist daher z.B. $\frac{g}{cm^3}$ oder $\frac{kg}{dm^3}$ oder $\frac{t}{m^3}$.

Diese Einheiten müssen nicht ineinander umgerechnet werden, denn sie sind gleichwertig:

$$1\frac{t}{m^3} = \frac{1000\ kg}{1000\ dm^3} = 1\frac{kg}{dm^3} = \frac{1000\ g}{1000\ cm^3} = 1\frac{g}{cm} = ...$$

Ich ersetzt nun m in (4) durch $m = \rho \cdot V$: und dm durch $dm = \rho \cdot d$

$$\rho \cdot V \cdot r_S = \int_V r \cdot \rho \cdot dV$$

was zu

$$V \cdot r_S = \int_V r\, dV$$

führt und zu:

$$\boxed{r_S = \frac{1}{V} \cdot \int_V r\, dV} \qquad (5)$$

Damit kann man den Abstand des Schwerpunkte S von der Drehachse (Unterstützungspunkt) berechnen. Betrachtet man diese Angelegenheit dreidimensional (räumlich), dann hat der Schwerpunkt drei Koordinaten: $S(x_S \mid y_S \mid z_S)$. Man kann dann zeigen, dass für diese Koordinaten die analogen Formeln gelten:

Koordinaten des Schwerpunktes eines homogenen Körpers:

$$x_S = \frac{1}{V} \cdot \int_V x\, dV, \quad y_S = \frac{1}{V} \cdot \int_V y\, dV \quad \text{und} \quad z_S = \frac{1}{V} \cdot \int_V z\, dV \qquad (6)$$

Man kann auch für eine Fläche einen Schwerpunkt berechnen.

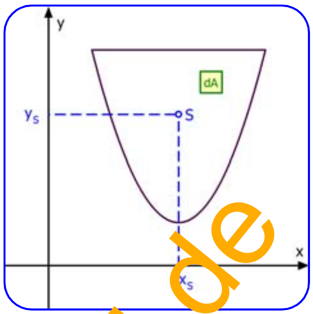
Dazu muss man die Formeln (6) vereinfachen. Wir verwenden als Körper nun eine zylindrische Platte, also etwa einen Quader oder einen Zylinder.
Dessen Volumen ist leicht berechenbar durch $V = A \cdot h$ (A = Grundfläche, Querschnitt, h = Höhe). Das Differenzial ist dann $dV = h \cdot dA$, denn h ist ja überall konstant.
Unser Volumelement kann man sich also als infinitesimale (extrem dünne) Säule der Höhe h mit dem Querschnitt dA vorstellen. Dann folgt aus (6):

$$x_S = \frac{1}{A \cdot h} \cdot \int_A x\, h \cdot dA = \boxed{\frac{1}{A} \cdot \int_A x\, dA} \qquad \boxed{y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_A y\, dA} \qquad \text{und} \quad z_S = \tfrac{1}{2}h$$

Die z-Koordinate beruht darauf, dass wir uns die ***Platte*** auf die x-y-Ebene aufgesetzt denken. Dann liegt natürlich der Schwerpunkt in halber Höhe.

Um den Schwerpunkt einer ebenen Fläche zu bestimmen, lässt man $h \to 0$ gehen.
Dann kann man das Problem zweidimensional sehen und erhält für den

Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche:



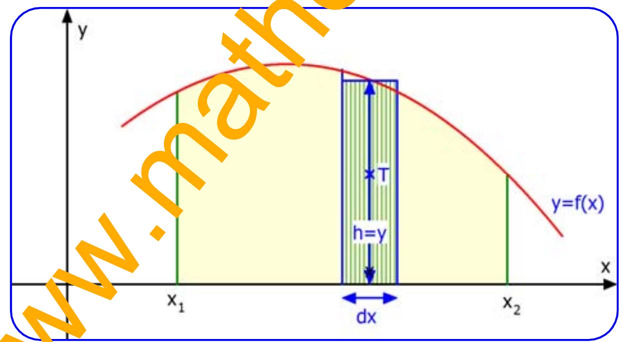
$$\boxed{x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_A x \, dA} \quad \boxed{y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_A y \, dA} \qquad (7)$$

Die Abbildung zeige eine Fläche mit ihrem Schwerpunkt und einem Flächenelement dA. Das A unter dem Integralzeichen soll andeuten, dass über alle Flächenelemente von A zu summieren ist.

Nun müssen diese Formeln (6) noch in solche verwandelt werden, die zur praktischen Berechnung geeignet sind. Dazu betrachten wir zuerst eine

Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse.

An der Stelle x liege ein schmaler Streifen der Breite dx. Man kann ihn näherungsweise als Rechteck ansehen. Dieses hat den Inhalt $dA = dx \cdot y$. Der Schwerpunkt T ist in halber Höhe: $T\left(x \mid \frac{y}{2}\right)$

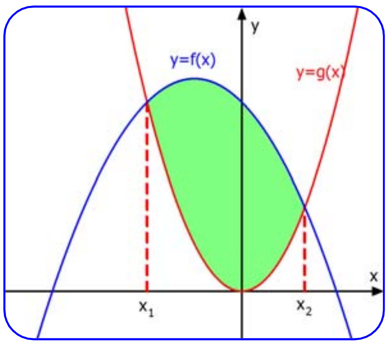


Damit wird aus den Formeln (7):

$$\boxed{x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_A xy \cdot dx = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f(x) \, dx} \quad \boxed{y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_A \tfrac{1}{2} y^2 dx = \frac{1}{2A} \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x)\right]^2 dx} \qquad (8)$$

Als nächstes untersuchen wir, wie man eine **Fläche zwischen zwei Kurven** behandelt:

Im Unterschied zur Abbildung darüber ist die Höhe eines Flächensegments (Mini-Rechtecks) nicht y=f(x) sondern die Differenz der Funktionswerte der beiden Randkurven:
$y = f(x) - g(x)$. Damit lauten die Formeln nun:



$$\boxed{x_S = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \left[f(x) - g(x)\right] dx}$$

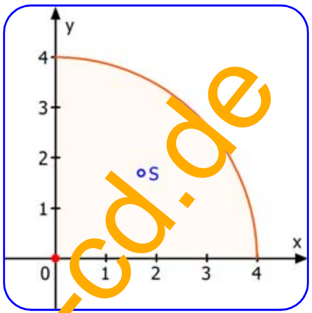
$$\boxed{y_S = \frac{1}{2A} \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - g(x)\right]^2 dx} \qquad (9)$$

Nun einige Beispiele dazu.

2 Beispielrechnungen zu Schwerpunkten von homogenen Flächen

(1) Schwerpunkt eines Viertelskreises: $G = \{(x \mid y) \mid 0 \le x \le 4\,;\; 0 \le y \le 4;\ x^2 + y^2 = 16\}$

Zuerst wird der Flächeninhalt A berechnet: $A = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 16 = 4\pi$



Die Kreisgleichung wird umgestellt: $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$

Als Randfunktion wähle ich $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

Schwerpunktskoordinaten:

$$x_S = \frac{1}{A}\int_{x_1}^{x_2} x \cdot f(x)\,dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^4 x \cdot \sqrt{16 - x^2}\,dx$$

Vereinfachung mit der Substitution: $u = 16 - x^2 \;\Rightarrow\; du = -2x \cdot dx$

$x \cdot dx = -\frac{1}{2}\,du$

Umrechnung der Grenzen: $x_1 = 0 \to u_1 = 16$ und $x_2 = 4 \to u_2 = 0$

$$x_S = \frac{1}{4\pi}\int_{16}^{0} -\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{u}\,du = \frac{1}{8\pi}\int_0^{16} u^{1/2}du = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{16} = \frac{\frac{2}{3}}{8\pi} \cdot \left[u\sqrt{u}\right]_0^{16} = \frac{1}{12\pi} \cdot 16 \cdot \sqrt{16}$$

$$x_S = \frac{16}{3\pi} \approx 1{,}70$$

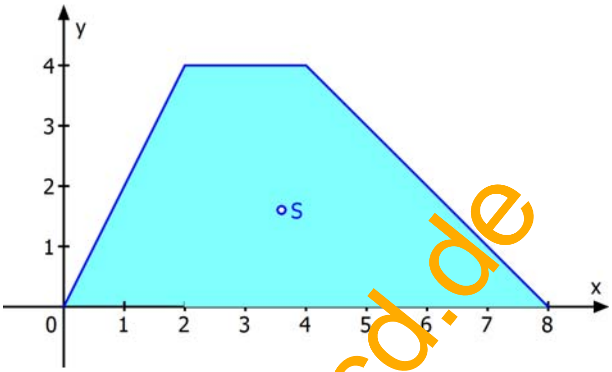
$$y_S = \boxed{\frac{1}{2A}\int_0^4 y^2 dx} = \frac{1}{8\pi}\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}^{\,2}\,dx = \frac{1}{8\pi}\int_0^4 \left(16 - x^2\right)dx = \frac{1}{8\pi}\left[16x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{8\pi} \cdot \left[64 - \tfrac{1}{3} \cdot 64\right] = \frac{1}{8\pi} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 64 = \frac{16}{3\pi}$$

Ergebnis: Der Schwerpunkt dieses Viertelkreises ist $S\left(\frac{16}{3\pi} \mid \frac{16}{3\pi}\right) \approx (1{,}70 \mid 1{,}70)$

(2) Schwerpunkt eines Trapezes: $G = \{(x \mid y) \mid 0 \le x \le 8;\ 0 \le y \le f(x)\}$

mit $x = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 2 \\ 4 & 2 < x < 4 \\ 8 - x & 4 \le x \le 8 \end{cases}$



Trapezfläche: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{2+8}{2} \cdot 4 = 20$

Schwerpunktskoordinaten:

$$x_S = \boxed{\frac{1}{A}\int_{x_1}^{x_2} x \cdot f(x)\,dx} = \frac{1}{20}\left(\int_0^2 x \cdot 2x \cdot dx + \int_2^4 x \cdot 4dx + \int_4^8 x(8-x)dx\right)$$

$$x_S = \frac{1}{20}\left(\int_0^2 2x^2dx + \int_2^4 4xdx + \int_4^8 \left[8x - x^2\right]dx\right) = \frac{1}{20} \cdot \left(\left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^2 + \left[2x^2\right]_2^4 + \left[4x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_4^8\right)$$

$$x_S = \frac{1}{20} \cdot \left[\frac{16}{3} + 32 - 8 + 256 - \frac{512}{3} - 64 + \frac{64}{3}\right] = \frac{72}{20} = 3{,}6$$

$$y_S = \boxed{\frac{1}{2A}\int_0^8 y^2dx} = \frac{1}{40} \cdot \left(\int_0^2 4x^2dx + \int_2^4 16\,dx + \int_4^8 (8-x)^2\,dx\right)$$

$$y_S = \frac{1}{40} \cdot \left(\left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^2 + \left[16x\right]_2^4 - \left[\frac{(8-x)^3}{3}\right]_4^8\right)$$

$$y_S = \frac{1}{40} \cdot \left[\frac{32}{3} - 0 + 64 - 32 - 0 + \frac{64}{3}\right] = \frac{64}{40} = 1{,}6$$

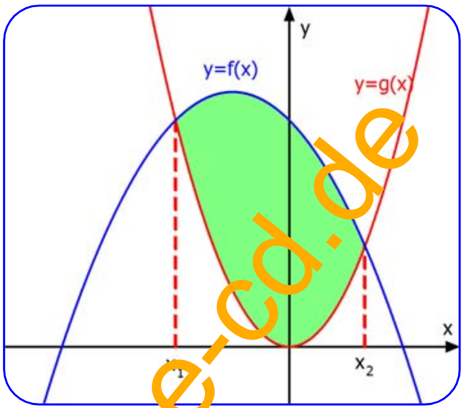
Ergebnis: $S(3{,}6 \mid 1{,}6)$

(3) Schwerpunkt einer Fläche zwischen zwei Parabeln:

$$G = \{(x \mid y) \mid g(x) \le y \le f(x)\}$$

mit $\quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 \quad$ und $\quad g(x) = x^2$

Schnittstellen beider Kurven:



$$x^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 - x + 4 \quad | \cdot 2$$

$$2x^2 = -x^2 - 2x + 8$$

$$3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6} = \begin{cases} \frac{4}{3} \\ -2 \end{cases}$$

Vorarbeit: Fläche zwischen den Kurven:

$$A = \int_{-2}^{4/3} \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_{-2}^{4/3} \left(-\tfrac{3}{2}x^2 - x + 4\right) dx = \left[-\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-2}^{4/3}$$

$$A = \left[-\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{64}{27} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{16}{9} + 4 \cdot \tfrac{4}{3}\right] - \left[4 - 2 - 8\right] = \boxed{\tfrac{250}{27}}$$

Schwerpunktskoordinaten:

$$x_S = \boxed{\frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot [f(x) - g(x)]\, dx} = \frac{27}{250} \cdot \int_{-2}^{4/3} \left(-\tfrac{3}{2}x^3 - x^2 + 4x\right) dx = \frac{27}{250} \cdot \left[-\tfrac{3}{8}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_{-2}^{4/3}$$

$$x_S = \frac{27}{250} \cdot \left[-\tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{256}{81} - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{64}{27} + 2 \cdot \tfrac{16}{9}\right] - \frac{27}{250} \cdot \left[-6 + \tfrac{8}{3} + 8\right] \approx -\frac{127}{375} \approx -0{,}34$$

$$y_S = \boxed{\frac{1}{2A} \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]^2\, dx} = \frac{27}{500} \int_{-2}^{4/3} \left(-\tfrac{3}{2}x^2 - x + 4\right)^2 dx = \frac{27}{500} \cdot \int_{-2}^{4/3} \left(\tfrac{9}{4}x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 8x + 16\right) dx$$

$$y_S = \frac{27}{500} \cdot \left[\tfrac{9}{20}x^5 + \tfrac{3}{4}x^4 - \tfrac{11}{3}x^3 - 4x^2 + 16x\right]_{-2}^{4/3}$$

$$y_S = \frac{27}{500} \cdot \left[\tfrac{9}{20} \cdot \tfrac{1024}{243} + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{256}{81} - \tfrac{11}{3} \cdot \tfrac{64}{27} - 4 \cdot \tfrac{16}{9} + 16 \cdot \tfrac{4}{3}\right] - \frac{27}{500} \cdot \left[-\tfrac{9}{20} \cdot 32 + 12 + \tfrac{88}{3} - 16 - 32\right]$$

$$y_S = \ldots = \frac{5}{3}$$

Ergebnis: $\quad S(-0{,}34 \mid 1{,}67)$

3 Schwerpunkt eines Rotationskörpers

(1) Berechne den Schwerpunkt S einer Halbkugel mit dem Radius R, die ihren Mittelpunkt im Ursprung hat und auf der x-y-Ebene aufsitzt.
Die Halbkugel ist in Kugelkoordinaten diese Punktmenge:

$$K = \left\{(r\,|\,\vartheta\,|\,\varphi)\,|\,0 \le r \le R,\ 0 \le \vartheta \le \tfrac{1}{2}\pi \ \text{ und } \ 0 \le \varphi < 2\pi\right\}$$

S hat aus Symmetriegründen die Koordinaten $x_S = y_S = 0$.

Berechnung der z-Koordinate:

$$z_S = \frac{1}{V}\int_V z\,dV = \frac{1}{V}\int_{r=0}^{R}\int_{\vartheta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3\cdot\cos(\vartheta)\cdot\sin(\vartheta)\cdot dr\cdot d\vartheta\cdot d\varphi$$

$$z_S = \frac{1}{V}\int_{r=0}^{R} r^3\int_{\vartheta=0}^{\pi/2}\cdot\cos(\vartheta)\cdot\sin(\vartheta)\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\right)\cdot d\vartheta\cdot dr$$

$$z_S = \frac{1}{V}\int_{r=0}^{R} r^3\int_{\vartheta=0}^{\pi/2}\cdot\cos(\vartheta)\cdot\sin(\vartheta)\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\cdot d\vartheta\cdot dr$$

$$z_S = \frac{2\pi}{V}\int_{r=0}^{R} r^3\left(\int_{\vartheta=0}^{\pi/2}\cos(\vartheta)\cdot\sin(\vartheta)\,d\vartheta\right)dr$$

Vereinfachung durch die Substitution: $u = \sin(\vartheta) \Rightarrow du = \cos(\vartheta)\cdot d\vartheta$

Umrechnung der Grenzen: $\vartheta_1 = 0 \to u_1 = 0,\ \vartheta_2 = \tfrac{1}{2}\pi \to u_2 = 1$

$$z_S = \frac{2\pi}{V}\int_{r=0}^{R} r^3\left(\int_{u=0}^{1} u\cdot du\right)dr = \frac{2\pi}{V}\int_{r=0}^{R} r^3\cdot\left[\tfrac{1}{2}u^2\right]_0^1 dr = \frac{2\pi}{V}\int_{r=0}^{R} r^3\tfrac{1}{2}\,dr = \frac{\pi}{V}\cdot\left[\tfrac{1}{4}r^4\right]_0^R = \frac{\pi\cdot R^4}{4V}$$

Spätestens jetzt ersetzt man V durch das Volumen der Halbkugel: $V = \tfrac{2}{3}\pi R^3$

$$z_S = \frac{\pi\cdot R^4}{4\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot R^3} \Rightarrow \boxed{z_S = \tfrac{3}{8}R}$$

Ergebnis: $S\left(0\,|\,0\,|\,\tfrac{3}{8}R\right)$